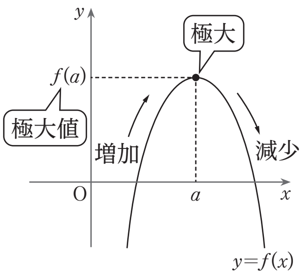
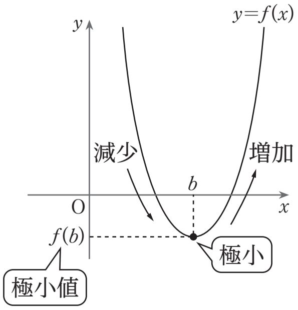
PART4 関数の極大・極小

要点 ① 関数の極大・極小

関数 $f(x)$ の値が，$x=a$ を境目として増加から減少に転じるとき，$f(x)$ は $x=a$ で「　　」であるといい，$f(a)$ を「　　　」という。

また，関数 $f(x)$ の値が，$x=b$ を境目として減少から増加に転じるとき，$f(x)$ は $x=b$ で「　　」であるといい，$f(b)$ を「　　　」という。

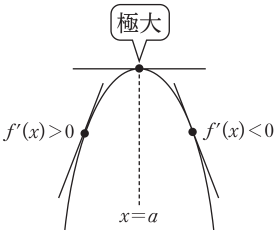


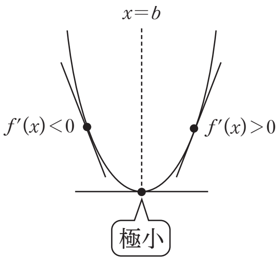


極大値と極小値をあわせて「　　」という。

関数 $f(x)$ の値の増減は，$f'(x)$ の符号で考えることができる。

$f'(x)$ の符号が $x=a$ を境に「　」から「　」に転じるとき，$f(x)$ は $x=a$ を境目として増加から減少に転じる。また，$f'(x)$ の符号が $x=b$ を境に「　」から「　」に転じるとき，$f(x)$ は $x=b$ を境目として減少から増加に転じる。





関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるときは，$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が入れ替わるから，$f'(a)$ 　　　である。よって，以下のことがいえる。

関数の極大・極小

$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で

$f'(x)$ の符号が正から負に転じるならば，$f(a)$ は極大値

$f'(x)$ の符号が負から正に転じるならば，$f(a)$ は極小値

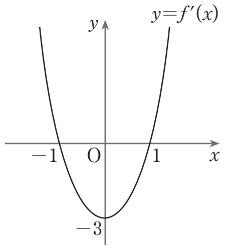
例　関数 $f(x)=x^3-3x+2$ の増減を調べ，極値を求め，グラフをかく。

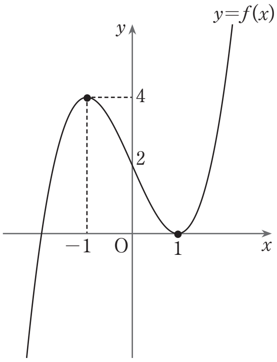
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1,\ 1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗





したがって

$x=$　　で極大値

$x=$　で極小値

をとる。$y=f(x)$ のグラフは右図。

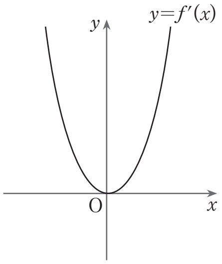
例　関数 $f(x)=x^3$ について

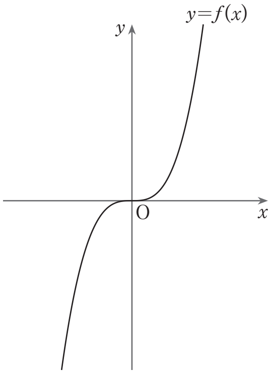
$$f'(x)=3x^2$$

$f'(x)=0$ とすると $x=0$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗





したがって，$f(x)$ は常に増加し，極値をもたない。

$y=f(x)$ のグラフは右図。

以上より，次のことがいえる。

$f'(a)=0$ であっても，$f(a)$ が極値になるとは限らない。

4 次の関数の増減を調べ，極値を求め，そのグラフをかけ。

(1) $f(x)=3x^3-9x^2+6$　　(2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+2$

Point Pickup

関数の極値とグラフ

関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求め，グラフをかく手順は以下。

① 導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x)=0$ となる実数 x の値を求める。この x の値が極値をとる x の候補。

③ ②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。

④ ②で求めた x の値の前後で

$f'(x)$ の符号が正から負に転じるならば，$f(x)$ はその x において極大値をとる。

$f'(x)$ の符号が負から正に転じるならば，$f(x)$ はその x において極小値をとる。

$f'(x)$ の符号に変化がなければ，$f(x)$ はその x において極値をとらない。

⑤ ③の増減表をもとにグラフをかく。

②の x の値におけるグラフの接線が x 軸と平行となることに注意。

第 17 講　PART4 確認問題

1　関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ について

$f'(x)=0$ となる x の値は

$\boxed{\text{ア}}$

これより，極値を求めると

極大値は $\boxed{\text{イ}}$，極小値は $\boxed{\text{ウ}}$

$y=f(x)$ のグラフは $\boxed{\text{エ}}$ である。

[$\boxed{\text{ア}}$ の選択肢]

① $x=-1,\ 3$　② $x=-3,\ 1$

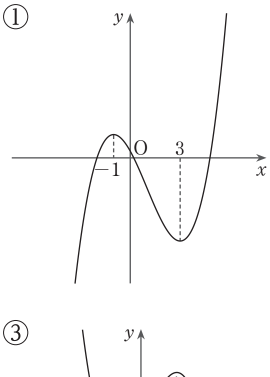
③ $x=-1$ の 1 つ　④ $x=3$ の 1 つ　⑤ ない

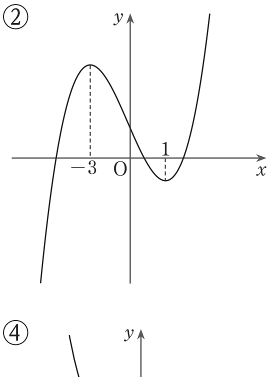
[$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢]

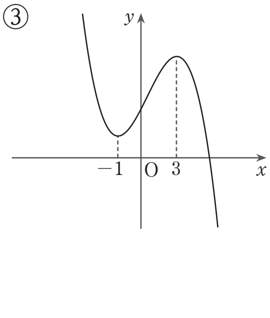
① -25　② -20　③ 7

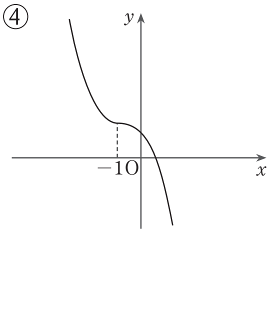
④ 13　⑤ 83　⑥ ない

[$\boxed{\text{エ}}$ の選択肢]

①


②


③


④


2 関数 $f(x)=x^3+6x^2+12x-18$ について

$f'(x)=0$ となる x の値は

　　　オ

これより，極値を求めると

　　　極大値は **カ** ，極小値は **キ**

$y=f(x)$ のグラフは **ク** である。

[**オ** の選択肢]

① $x=-2$，2　　② $x=-2$ の 1 つ

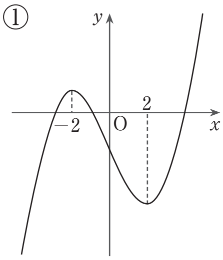
③ $x=0$ の 1 つ　　④ $x=2$ の 1 つ　　⑤ ない

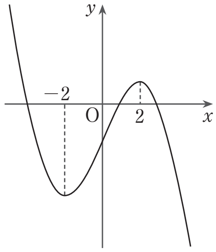
[**カ** ， **キ** の選択肢]

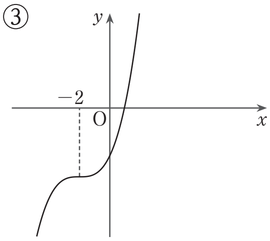
① -26　　② -10　　③ -2

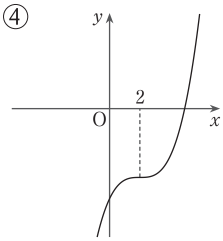
④ 26　　⑤ 38　　⑥ ない

[**ク** の選択肢]

①


②


③


④


[MEMO]

PART4 関数の極大・極小

4 次の関数の増減を調べ，極値を求め，そのグラフをかけ。

(1) $f(x)=3x^3-9x^2+6$　　(2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+2$

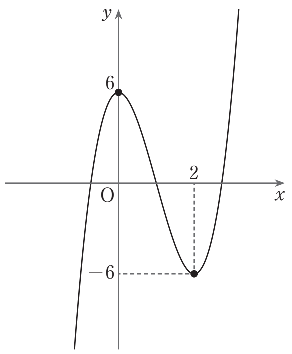
[解答]

(1) $f(x)=3x^3-9x^2+6$ より　$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-6	↗
		極大		極小	



したがって

$x=0$ で極大値 6

$x=2$ で極小値 -6

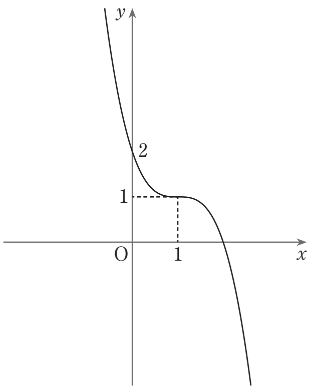
をとる。$y=f(x)$ のグラフは右図。

(2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+2$ より　$f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)=-3(x-1)^2$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↘



したがって，$f(x)$ は常に減少し，極値をもたない。

$y=f(x)$ のグラフは右図。

第 17 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：③，ウ：①，エ：①

[解説]

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ より

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$
$$=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 極大	↘	-25 極小	↗

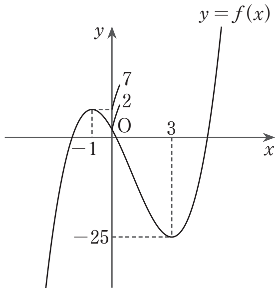
[A]

したがって，$f(x)$ は

$x=-1$ で極大値 **7**

$x=3$ で極小値 **-25**

をとる。グラフは下図のようになる。



[A]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値

2 [正解] オ：②，カ：⑥，キ：⑥，ク：③

[解説]

$f(x)=x^3+6x^2+12x-18$ より

$$f'(x)=3x^2+12x+12$$
$$=3(x^2+4x+4)$$
$$=3(x+2)^2$$

$f'(x)=0$ とすると

$$\boldsymbol{x=-2}$$

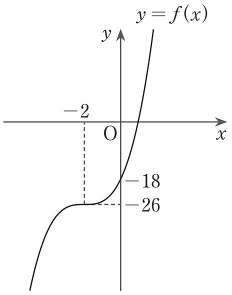
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-26	↗

[B]

したがって，$f(x)$ は常に増加し，**極値をもたない**。

グラフは下図のようになる。



[B]　関数の極大・極小
$f'(a)=0$ となる $x=a$ の前後で
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ の符号が負から正に転じる
$\Longrightarrow$ $f(a)$ は極小値
$f'(x)$ の符号に変化がなければ，$f(x)$ は
その x において極値をとらない。